VI. LA TABLA DE MORTALIDAD Y SUS FUNCIONES

VI. LA TABLA DE MORTALIDAD Y SUS FUNCIONES

6.1 Marco teórico

La supervivencia humana se relaciona directamente con variados factores sociales, económicos, demográficos, culturales, etc., cada uno de ellos con mayor o menor grado de complicación, sin embargo, lo que no se puede negar es la certeza de que el individuo habrá de fallecer, aunque el momento de la ocurrencia de este hecho esta definido por la incertidumbre.

Bajo este punto de vista, el problema de la supervivencia humana es tratado desde la perspectiva del fenómeno de la mortalidad, que da certeza sobre su ocurrencia, aunque enmarcado por la incertidumbre en relación a la edad en que esto suceda o a la supervivencia después de cierta edad.

Existe otra dimensión del análisis de la supervivencia, relacionada al estado o condición en la que se encuentra el individuo al momento de la ocurrencia de la muerte, esto es, las distintas situaciones sociales, económicas o demográficas, que generan diferenciales en la mortalidad de mucho interés en el Análisis Demográfico, aspecto que en este estudio se tocará únicamente la dimensión espacial, esto es, del lugar de residencia, que aunque lleva implícito los distintos estados de vida, resaltan sobre todo las diferencias de orden cultural y social.

Es necesario resaltar, que la supervivencia de un individuo afecta al tamaño de la población únicamente por la salida de la misma por acción de la mortalidad, y a la estructura etárea por sobrepasar cierta edad, quedando excluida totalmente las variaciones, en estos aspectos, debidas al efecto de los movimientos migratorios, por lo que es necesario considerar a la población en estudio como una Población Cerrada, esto es, no expuesta a los movimientos migratorios o lo que es lo mismo cerrada a las migraciones.

Establecida la certeza del fallecimiento del individuo, queda como única incertidumbre la edad de la ocurrencia de este hecho, la misma que es considerada como una variable aleatoria, esto es que toma un valor numérico para cada uno de los resultados de un experimento aleatorio, en este caso la muerte. Intuitivamente, se puede conceptuar a la variable aleatoria como aquella cuyo valor numérico se determina al azar.

Se ha establecido que en el análisis de la supervivencia existe la certeza del fallecimiento del individuo, aunque la edad a la que ocurra este evento esta rodeada de incertidumbre. Se puede considerar dos posibilidades: a) Que el individuo muera antes de alcanzar cierta edad, es decir, no supere una cierta edad, la variable aleatoria de este caso se hallará definida en el intervalo $]0,x]$, siendo x la edad que supuestamente no sobrevivirá el individuo; b) Que el individuo supere con vida una determinada edad, en cuyo caso su fallecimiento se producirá en el intervalo $]x, w]$, siendo "x" la edad a la que sobrevive y " w" a la edad extrema o límite, donde no hay sobrevivientes. En ambos casos la correspondiente variable aleatoria, es la edad al fallecimiento y adquirirá valores en los intervalos señalados.

Si consideramos la edad (incierta) en la que el individuo fallece como variable aleatoria y la representamos por "X", y aceptando que el fenómeno aleatorio de la muerte posee una estructura estocástica, se verificará que

$$P(X \leq w) = 1$$

Esto indica que hay certeza de muerte a una edad menor a "w", esto es, no hay sobrevivientes a la edad "w".

Con el mismo razonamiento, se deduce que:

$$P(X > w) = 0$$

Esto es, no hay probabilidad de que un individuo supere la edad extrema "w"

Por otra parte, y de acuerdo con lo dicho anteriormente, habrá de cumplirse que

$$P(0 < X \leq x) + P(x < X \leq w) = P(X \leq w) = 1$$

El primer sumando expresa la probabilidad de que un individuo no supere con vida la edad "x", obviamente, ha de alcanzar en todo caso una edad, por pequeña que sea, mayor a la de su nacimiento, porque el concepto de raíz de la tabla, implica una cohorte inicial de nacidos vivos, no se acepta el concepto de nacidos muertos (mortinatos). El segundo sumando indica la probabilidad de que el fallecimiento tenga lugar después de la edad "x".

En el trabajo estadístico, no basta considerar que las variables sean aleatorias, es necesario poder predecir, en algún sentido, el valor que la variable adoptará en cualquier momento. Puesto que el comportamiento de una variable aleatoria está gobernado por el azar, las predicciones deberán hacerse con un serio tratamiento de la incertidumbre. Lo más conveniente es describir el comportamiento de la variable en términos de probabilidades. Para ello se utilizan dos funciones, la función de probabilidad y la función de distribución acumulada.

La función de probabilidad (densidad), para una variable aleatoria discreta, nos da la probabilidad de que la variable aleatoria "X" (edad de muerte) adopte un valor numérico "x" determinado, en tal sentido, si "X" es una variable aleatoria discreta la función de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = P(X = x), \quad \text{para todo "x" real.}$$

La función de Distribución Acumulada proporciona la probabilidad de que "X" tome un valor por debajo de "x", incluyendo éste, luego, si "X" es una variable aleatoria discreta (edad de muerte), con función de probabilidad P(x). La función de distribución, se define como:

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} P(x)$$

Si denominamos F(x) a la función de distribución de la variable edad de muerte, esto es, si

$$F(x) = P(X \leq x)$$

y de acuerdo con las propiedades que toda función de distribución ha de satisfacer, así como con el supuesto de no considerar la hipótesis de mortinatos, tendremos que:

1. $F(0) = 0$
2. $F(w) = 1$

Consecuentemente,

a). $P(0 < X \leq x) = P(X \leq x) - P(X \leq 0) = F(x) - F(0) = F(x)$

b) . $P(x < X \leq w) = P(x \leq w) - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

Es decir, la probabilidad de muerte para un individuo con edad no superior a "x" es la función de distribución de la variable aleatoria edad de muerte, en tanto que la probabilidad de supervivencia a una edad "x" es el complemento respecto a la unidad de la función de distribución de la referida variable.

Bajo estas consideraciones, se desarrollará un marco teórico, que a parte de enfatizar algunos conceptos, sobre todo de índole demográficos, definirán las funciones biométricas de mayor trascendencia; luego se analizará la información empírica que permitirá la construcción de tablas de mortalidad. Con la finalidad de estudiar las diferencias del nivel de la mortalidad según lugares de residencia, se formarán estratos o grupos departamentales, con una doble finalidad, la primera, juntar poblaciones con características socio-demográficas homogéneas dentro de cada estrato y heterogéneas entre estratos; y la segunda darle mayor consistencia o "robustez" a la información.

6.2 El concepto de tabla de mortalidad

El instrumento básico para el estudio cuantitativo del fenómeno de la Supervivencia es el conocido como "Tabla de Mortalidad" o "Tabla de Vida", conceptuado como un modelo teórico que permite dar cuenta de los hechos de mortalidad vividos por una cohorte hipotética de nacidos en una misma fecha, desde el momento del nacimiento hasta la extinción completa de la generación, por exclusiva acción de la mortalidad.

Bajo estos conceptos, se puede definir la Tabla de Mortalidad como un instrumento o esquema teórico que permite medir las probabilidades de vida y de muerte de una población en función de la edad. Dicho instrumento provee la más completa descripción "estadística" de la mortalidad, constituye la base del modelo de población estacionaria y su técnica es muy usada por los demógrafos, actuarios y otros investigadores en una gran variedad de problemas. La descripción de la tabla de vida comprende una parte considerable de toda la notación y las relaciones básicas utilizadas en demografía[22].

Los supuestos fundamentales de una tabla se resumen en los siguientes acápites:

- Es un modelo teórico que describe numéricamente el proceso de extinción, por muerte, de un grupo inicial, generalmente un grupo hipotético de recién nacidos.

- La ley de extinción corresponde a la mortalidad experimentada por la población durante un intervalo de tiempo relativamente corto y referida, la mayoría de las veces, a un año civil determinado.

- Como consecuencia de los puntos anteriores, aunque los valores de la tabla están expresados en función de la edad, ellos no toman en cuenta las variaciones de la mortalidad en el tiempo, esto es la población envejece independientemente del tiempo.

Si el colectivo al que la tabla se refiere reuniera alguna característica especial, por ejemplo, que sus miembros estuvieran afectados por alguna circunstancia que provocase su invalidez para el trabajo, se puede construir la correspondiente tabla de mortalidad referida a ese grupo especial. En ocasiones también pueden elaborarse las denominadas "tablas seleccionadas", que se caracterizan porque incluyen individuos que reúnen no sólo la característica explicada por la edad, sino también la del tiempo transcurrido desde la inclusión del individuo en una categoría específica.

La utilización de la tabla de mortalidad dentro del campo demográfico se resume en las siguientes características:

- La tabla de mortalidad permite describir el comportamiento de la mortalidad por edades, lo cual es de importancia desde que la mortalidad es diferencial según la edad.

- Permite obtener probabilidades y otras medidas convencionales de la mortalidad, que son más apropiadas que las tasas de mortalidad por edad, sea para calcular los sobrevivientes de una población, para combinarlas con probabilidades de otros grupos de edades, o para derivar relaciones analíticas entre las diversas variables demográficas.

- La tabla de mortalidad puede ser asimilada a un modelo de población estacionaria, que supone la mortalidad por edades y los nacimientos constantes en el tiempo, como consecuencia la población total y la distribución por edades permanecen invariables, la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad, en consecuencia la tasa de crecimiento natural es nula. Dicho modelo proporciona las relaciones de supervivencia necesarias para proyectar la población por edades y sexo.

- El modelo de tablas de mortalidad puede ser usada en el análisis de diversas características socioeconómicas de la población, tales como la fuerza de trabajo, la población en edad escolar y la regulación de los sistemas de jubilación y pensiones para las personas de la tercera edad.

6.3 Funciones de la Tabla de Mortalidad

Las tablas de mortalidad están conformadas por una serie de funciones cuyo significado, fórmula de cálculo y el comportamiento gráfico de cada una de ellas será tratada en forma especial, dada la importancia que tienen para el estudio.

[22] Antonio Ortega "Tablas de Mortalidad". CELADE. Costa Rica, 1987.

6.3.1 La función de supervivencia (l_x)

De acuerdo con el concepto de tabla de mortalidad, una de las principales características es la de establecer el número de supervivientes de la cohorte a una edad exacta determinada. A tal efecto, se conceptúa la función de supervivencia como una aplicación definida en un intervalo $[0, w[$ con valores en R^+:

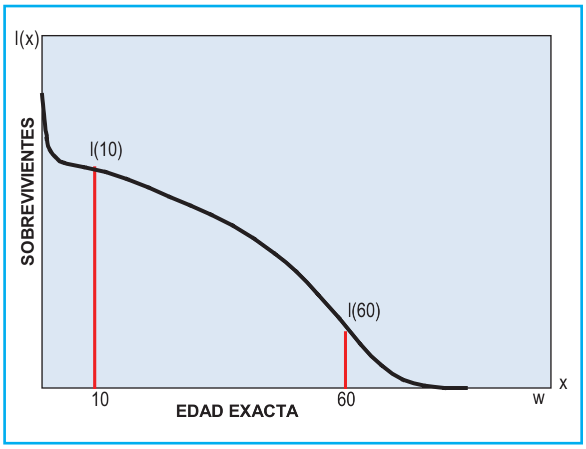
$$l : [0, w[\rightarrow R^+$$

Desde el punto de vista estadístico esta función expresará el número de supervivientes a una edad exacta "x", lo que, matemáticamente, se expresa en la forma señalada, pues, obviamente, por debajo de la edad cero no tiene sentido hablar de la supervivencia y a partir de una edad w (edad extrema) la cohorte inicial se habrá extinguido[23].

En síntesis, la función de sobrevivientes representa al número de personas que, de acuerdo con la tabla de mortalidad, alcanzan con vida la edad **exacta "x"** procedentes de una generación inicial que llegan con vida a la edad "a", siendo ésta la más joven para la que se conocen valores de l_x . En particular si a = 0, $\boldsymbol{l_0}$ indica el número anual de nacimientos (nacidos vivos) supuestos en la tabla de mortalidad. Los valores de los sobrevivientes a la edad "x" que aparecen tabulados se calculan en base a la relación con otras funciones, es decir no resultan de la observación directa de una población.

El subíndice "x" indica la edad exacta alcanzada por el grupo inicial. El valor numérico de l_a, esto es, el valor de los sobrevivientes para la edad más baja considerada en la tabla se conoce como la raíz de la tabla de mortalidad. Se acostumbra fijar arbitrariamente como raíz de la tabla el valor de $l_o = 100{,}000$. Se designa con la letra "w" como la edad entera más joven para la cual el número de sobrevivientes es cero, es decir $\boldsymbol{l_w} = 0$.

Gráfico Nº 6.1
FUNCIÓN: SUPERVIVENCIA



Teniendo presente el carácter cerrado de la población cuyos individuos están expuestos en todo instante a la acción de la mortalidad, esta función es positiva, monótona decreciente, es decir, esta ubicada en el primer cuadrante del sistema de ejes coordenados, además, **teóricamente es conveniente suponer** que se trata de una función continua, aunque en la realidad sea discreta, porque la función disminuye por muerte de personas cuyo mínimo es la unidad. Como es de esperar, la forma de esta función varía de una población a otra, pero en general presenta una trayectoria en la cual se pueden distinguir tres tramos: primer tramo, hasta aproximadamente los 10 años, con curvatura cóncava hacia arriba, debido a la mortalidad que decrece rápidamente en los primeros años de vida; segundo tramo, curvatura cóncava hacia abajo a partir de los 10 años hasta cerca de 60 debido a los cambios relativamente lentos de la mortalidad; tercer tramo, con curvatura nuevamente cóncava hacia arriba debido al incremento rápido de la mortalidad en la población adulta.

[23] Manuel López Cachero, Juan López de la Manzanara Barbero. "Estadística para Actuarios". España, Madrid, 1996.

6.3.2 Defunciones (d_x)

Esta función representa el número de muertes que se producen entre los componentes de una generación inicial l_0 (nacimientos) entre las edades exactas "x" y "x+1", se define como:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Por definición la función d_x proporciona el número de fallecidos con edad "x" en el transcurso de un año; es decir:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$
$$d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$$
$$d_{x+2} = l_{x+2} - l_{x+3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_{x+n-1} = l_{x+n-1} - l_{x+n}$$

Si sumamos ordenadamente estas expresiones tenemos:

$$\sum_{n=0}^{n-1} d_{x+n} = l_x - l_{x+n} = {}_n d_x$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

Esta expresión indica el número de defunciones ocurridas entre las edades exactas "x" y "x+n", El subíndice "x" representa la edad exacta, siendo "n" el intervalo de edades.

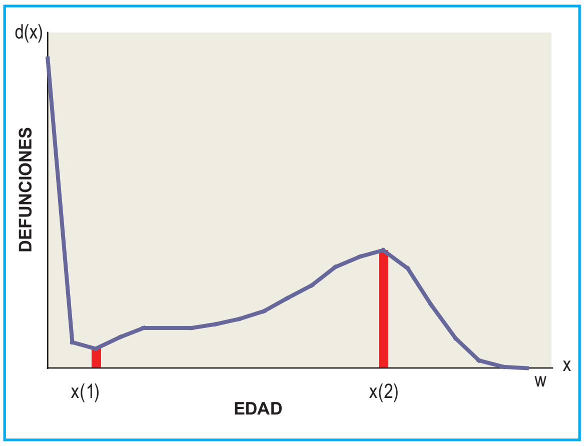
Es evidente, que si se estudia el proceso de extinción de una cohorte inicial en una población cerrada, se cumple que:

$$l_x = \sum_{j=x}^{w-1} d_j = d_x + d_{x+1} + \ldots\ldots + d_{w-1}$$

El comportamiento de esta función es el que se muestra en el siguiente gráfico, con las necesarias variaciones de acuerdo al nivel de la mortalidad de la población en estudio. Los puntos x(1) y x(2), corresponden a las edades donde la función l_x cambia de curvatura.

La edad x(2) en la cual se produce el máximo relativo de las muertes, o edad modal de las defunciones, se produce en edades entre los 65 y 80 años, a partir de esta edad el número de defunciones disminuye, no por que la intensidad de la mortalidad descienda, sino porque la generación se va agotando, esto es, el número de sobrevivientes es cada vez menor.

Gráfico Nº 6.2
FUNCIÓN: DEFUNCIONES



6.3.3 Probabilidad de Morir o Tasa de Mortalidad (q_x)

Para definir una "tasa de mortalidad", para los sobrevivientes a la edad "x", en un intervalo de un año "x+1", relacionamos, por cociente, las defunciones ocurridas en ese año d_x, con el grupo inicial l_x, de forma que:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Extendiendo este concepto a un intervalo de "n" años, definimos al cociente entre las defunciones ocurridas en ese intervalo y el número de supervivientes al inicio del intervalo como la probabilidad que tiene una persona de edad exacta "x" de fallecer dentro de los "n" años que siguen al momento en que alcanza esa edad como:

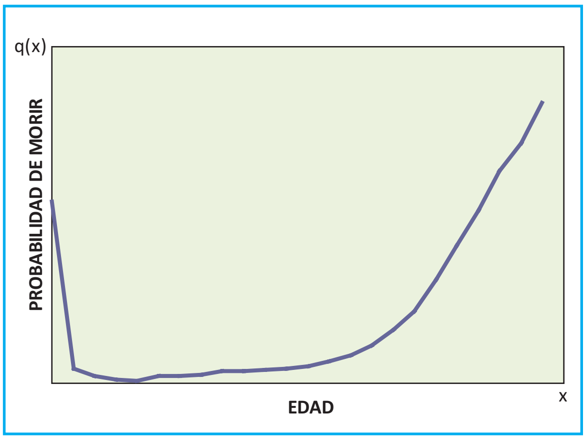
$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Es evidente que esta expresión no responde estrictamente al concepto formal de probabilidad, no obstante, cumple con no ser negativa ni mayor de uno. Aunque podría considerarse como una manera usual de asignar un número real a la probabilidad de morir en el intervalo $[\,x, x+n\,[$.

Generalmente, la tasa no se calcula conforme con la expresión anterior sino, más bien, se emplea esa relación para obtener el valor de las muertes ocurridas entre las edades "x "y "x+n", conocida la tasa de mortalidad, en efecto:

$${}_n d_x = l_x \times {}_n q_x$$

Gráfico Nº 6.3
FUNCIÓN: PROBABILIDAD DE MORIR



En las poblaciones donde el nivel de la mortalidad es alta, la curva se asemeja a una "U", en cambio en aquellos donde el nivel es relativamente bajo, la curva toma la forma de una "J", debido al descenso de probabilidad de morir de los niños. El punto más bajo de esta curva esta alrededor de los 10 años.

6.3.4 Probabilidad de supervivencia. (P_x)

Definimos una "tasa de supervivencia" al cociente entre el número de individuos vivos a la edad "x+n" y el de los vivos a la edad "x", de modo que:

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Esta función representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta "x" de sobrevivir "n" años más, esto es de llegar con vida a la edad exacta "x+n". En particular si n=1, es decir, la supervivencia en el periodo de un año, la probabilidad es:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Puesto que la función de supervivencia es positiva, monótona decreciente, es evidente que:

$$0 \leq {}_n p_x \leq 1$$

6.3.5 Tiempo vivido en un intervalo de edades (L_x)

Si consideramos el intervalo de edades $[x, x+n]$ los integrantes de la generación l_x viven un determinado número de años en ese intervalo, equivalente a la suma de los años que vive cada individuo entre las edades limites del intervalo, función que representamos con $_nL_x$. Esta función se denomina tiempo vivido entre "x" y "x+n".

El número de personas con edades comprendidas entre "x" y "x+n" años, es decir, población por grupos de edad cumplida, está dado por:

$$_nL_x = \int_x^{x+n} l_x \cdot dx$$

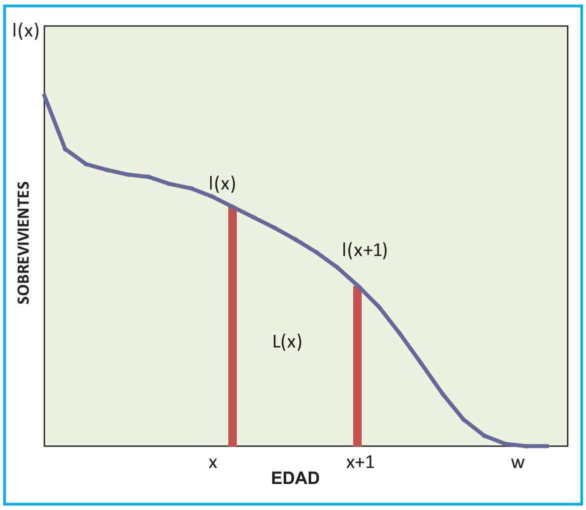
Esta función se conoce, también, como el tiempo vivido entre las edades "x" y "x+n" y se interpreta como el número de años vividos por la generación l_0 entre las edades "x" y "x+n".

En el caso que las personas que han cumplido la edad "x" y que todavía no llegan a la edad "x+1" la expresión matemática del tiempo vivido es:

$$L_x = \int_x^{x+1} l_x \, dx$$

La población para el grupo con edades comprendidas entre "x" y "x+n" años ($_nL_x$) corresponde al área comprendida entre la curva (l_x), el eje de las edades (x) y los sobrevivientes a las edades "x" y "x+n" (l_x y l_{x+n}), tal como se muestra en el gráfico que sigue.

Gráfico Nº 6.4
FUNCIÓN: TIEMPO VIVIDO EN UN INTERVALO DE EDADES



6.3.6 Total de años vividos o Vida Residual (T_x)

La población total en una población a una edad "x" estar dada por la suma de los valores de L_x , desde "x" hasta "w". Esta función representa el número total de años vividos por la generación de l_0 nacimientos entre las edades "x" y "w" o duración de la supervivencia a partir de la edad x hasta el momento de su muerte, así mismo se interpreta como el tiempo que le resta vivir a un individuo de edad "x" o vida residual. Matemáticamente se expresa como:

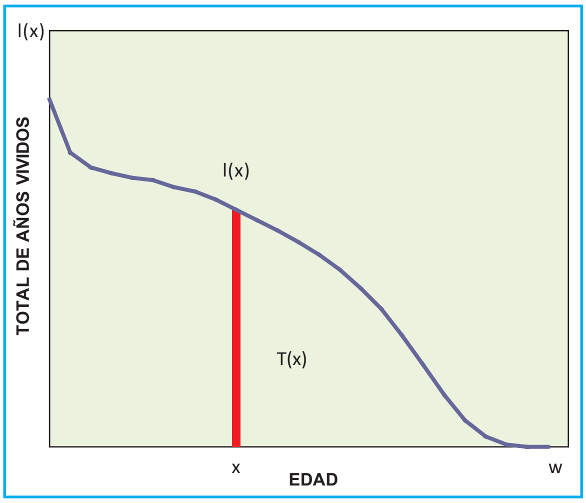
$$T_x = \int_x^w l_x \, dx$$

Si la variable aleatoria "edad de muerte" X es de carácter discreto, la función esta definida como:

$$T_x = \sum_{x=0}^{w} L_x$$

El comportamiento gráfico de esta función, corresponde al área encerrada entre el eje de las edades (x), los sobrevivientes a la edad "x" (l_x) y la curva que termina en la edad " w ".

Gráfico Nº 6.5
FUNCIÓN: POBLACIÓN TOTAL O VIDA RESIDUAL



6.3.7 Esperanza de Vida (e^o_x)

Si denominamos, X a la variable aleatoria "edad de muerte" y consideramos la vida residual o duración de la supervivencia a partir de "X", que representaremos por Y, entonces:

$$Y = X - x$$

Donde, Y será también una variable aleatoria, que estará definida de forma discreta o continua según se halle definida X. En todo caso, llamaremos "esperanza de vida" a la esperanza matemática, E(Y), distinguiendo entre:

a) Esperanza reducida de vida, si Y es de carácter discreto, y
b) Esperanza completa de vida, si y es de carácter continuo.

El supuesto que se tratará es el correspondiente al carácter discreto de Y, esto es que el recorrido de la variable aleatoria Y será el de los números naturales (0. 1. 2……n, …), luego:

$$e_x^0 = E(Y)$$

Una aproximación de la esperanza de vida a cierta edad "x" se consigue dividiendo el tiempo vivido T_x por los l_x sobrevivientes a la edad "x", se obtiene la función esperanza de vida a la edad "x", esta función se interpreta como el número promedio de años que esperan vivir las personas que alcanzan con vida la edad exacta de "x". Se define como:

$$e_x^o = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{x=0}^{w} L_x$$

En particular cuando "x=0", se tiene la esperanza de vida al nacer (e_0^o), que es una medida resumen del nivel de la mortalidad general de la población, desde que en su cálculo intervienen las probabilidades de supervivir en todas las edades.

6.3.8 Tasa Central de Mortalidad (${}_n m_x$)

Las muertes anuales de personas con edad exacta "x" antes de alcanzar la edad "x+1" son d_x ; el tiempo vivido de individuos con edad entre "x" y "x+1" es L_x ; el cociente entre las dos cantidades proporciona la tasa central de mortalidad, que se expresa como:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{\int_x^{x+1} l_x dx}$$

Cuando el intervalo de edades es mayor que la unidad, las muertes anuales de personas con edad alcanzada "x" antes de alcanzar la edad "x+n" es ${}_{n}d_{x}$; el tiempo vivido entre "x" y "x+n" es ${}_{n}L_{x}$; consecuentemente el cociente entre las dos cantidades proporciona, para este caso, la tasa central de mortalidad, que se expresa como:

$${}_{n}m_{x} = \frac{{}_{n}d_{x}}{{}_{n}L_{x}} = \frac{{}_{n}d_{x}}{\int_{x}^{x+n} l_{x}dx}$$

6.4 La población Estacionaria

Se ha conceptuado la tabla de mortalidad como un instrumento teórico, que describe el proceso de extinción de una generación o cohorte hipotética de personas a través del tiempo, por acción exclusiva de la mortalidad, sometiéndola a determinadas condiciones de mortalidad y estableciendo a cada edad el número de sobrevivientes.

Una segunda interpretación de la tabla de vida resulta el considerarla como un modelo de población estacionaria. Una población estacionaria es un modelo teórico en el cual la población total así como la distribución por edades no cambia en el tiempo. En este modelo la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad, y, en consecuencia, la tasa de crecimiento natural es igual a cero. Tal población hipotética se puede obtener suponiendo que los nacimientos anuales son constantes e iguales a l_0 , y sometiéndolas a la ley de mortalidad invariable de la tabla de vida.

A fin de derivar las principales características del modelo de población estacionaria (vale decir, la población total, el número de defunciones, la tasa de natalidad, etc.), se obtendrán primero cuatro relaciones básicas, suponiendo que la mortalidad por edad se mantiene constante en el tiempo.

6.4.1 La Población

Si N(t) es la población total en el momento "t", B(t) el número de nacimientos anuales en el momento "t" y

$$p(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

la probabilidad de sobrevivir desde el nacimiento hasta la edad "x", la cual se supone constante en el tiempo, entonces el producto $B(t-x)p(x) = N(x,t)$ representa el número de personas que tienen edad "x" en el momento "t".

La población total en el momento "t", N(t), está formada por la suma de toda las personas que habiendo nacido en "t-x", han sobrevivido hasta el momento "t", teniendo entonces la edad "x". Esta suma se obtiene integrando la función representativa de la población por edad en el momento "t". Luego:

$$N(t) = \int_{0}^{w} B(t-x)\,p(x)\,dx$$

Haciendo un simple cambio de los límites de la integral, se obtiene el número de personas de un grupo de edades cualquiera; por ejemplo para las edades x, x+n sería:

$$N(x, x+n) = \int_{x}^{x+n} B(t-a)\,p(a)\,da$$

6.4.2 Las Defunciones

Análogamente, las defunciones totales *D(t)* se obtienen sumando el producto de las personas que han sobrevivido a la edad x en el momento "t", o sea, $B(t-x)\ p(x)$, por la tasa instantánea de mortalidad por edad $\mu(x)$, es decir:

$$D(t) = \int_{0}^{w} B(t-x)\,p(a)\,\mu(x)\,dx$$

Finalmente, las defunciones de un grupo de edades x, x+n se obtienen, como en el caso de la población por edades, cambiando los límites de la integral.

$$D(x, x+n) = \int_{x}^{n} B(t-a)\,p(a)\,\mu(a)\,da$$

6.4.3 Población estacionaria: principales características

Las cuatro relaciones anteriores se basan en el supuesto de mortalidad por edad constante. Agregando ahora el supuesto de que los nacimientos anuales en el momento "t" son iguales a l_0, se llega entonces a la población estacionaria, cuyas características son las siguientes:

a) Haciendo

$$B(t-x)=l_0 \text{ y } p(x)=\frac{l_x}{l_0}$$

en la relación que representa a la población total se obtiene:

$$N(t)=\int_0^w l_0 \frac{l_x}{l_0}\,dx=$$
$$=\int_0^w l_x\,dx=T_0=constante$$

Este resultado indica que en la población estacionaria, el número total de personas se mantiene constante en el tiempo, y su valor numérico es igual al valor T_0 de la Tabla de Vida.

b). Realizando el mismo reemplazo para la población por grupos de edades, se obtiene la población estacionaria por edades;

$$N(x,x+n)=\int_x^{x+n} l_a da={}_nL_x$$

Es decir, el número de personas de un grupo de edad cualquiera x, $x+n$ es constante en el tiempo e igual al valor numérico de la función ${}_nL_x$ de la tabla de vida.

c) Para calcular el número total de las defunciones, se realizan los reemplazos de las defunciones y la probabilidad de supervivir, de manera que:

$$D(t)=-\int_0^w l_0 \frac{l_x}{l_0}\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}dx=$$
$$=-\int_0^w dl_x=-(l_w-l_0)=l_0$$

Esto significa que en la población estacionaria el número total de de funciones que ocurre cada año es constante e igual al número de nacimientos anuales.

d) Finalmente, las defunciones por edades, luego de los reemplazos respectivos resulta:

$$D(x,x+n)=-\int_x^{x+n} dl_a=-(l_{x+n}-l_x)={}_nd_x$$

Se verifica así, que el número de muertes de cada grupo de edades de la población estacionaria, es igual al número de defunciones de la tabla de vida correspondiente.

6.4.4 Tasas de natalidad y mortalidad

Con esta información se pueden derivar las tasas de natalidad y mortalidad. La tasa bruta de natalidad, que es igual al cociente entre los nacimientos anuales y la población total, será:

$$b=\frac{B(t)}{N(t)}=\frac{l_0}{T_0}=\frac{1}{e_0^o}$$

La tasa bruta de mortalidad, que resulta de dividir las defunciones entre la población total será:

$$m=\frac{D(t)}{N(t)}=\frac{l_0}{T_0}=\frac{1}{e_0^o}$$

En la población estacionaria las tasas de natalidad y mortalidad son iguales, permanecen constantes en el tiempo y su valor numérico es igual a la inversa de la esperanza de vida al nacer, de la tabla de mortalidad utilizada en la elaboración del modelo.

6.4.5 Tasa de crecimiento natural

La tasa de crecimiento natural, que es la diferencia entre las tasa bruta de natalidad y mortalidad, será .igual a cero.

$$r=b-m=0$$

En resumen, si se tiene una población en la cual la mortalidad por edad es constante y los nacimientos anuales en el momento "t" son iguales a l_0, entonces la población total así como la población por edades, permanecen invariables; la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad, y las diversas características (T_0, ${}_nL_x$, ${}_nd_x$, etc) corresponden a la tabla de mortalidad considerada. Dicho modelo se denomina población estacionaria.

La interpretación de las funciones de la tabla de vida en la población estacionaria es la siguiente:

l_x : Es al número de personas que alcanza la edad exacta "x" en cada año. Tiene una significación similar al valor de E_x o personas a la edad "x" en una población real.

${}_nd_x$: Es el número de personas que fallecen cada año con edades comprendidas entre x y x+n. Tiene un significado similar al valor de $D(x,x+n)$ o defunciones entre las edades x y x+n de una población real.

${}_nL_x$: Representa el número de personas que en cualquier momento tiene edades comprendidas entre x y x+n. Su significado es análogo al valor de $N(x, x+n)$ de una población real.

Tx : Es el número de personas que en cualquier momento tiene edades comprendidas entre " x" y "w". Su significado es similar al valor de $N(x, w)$, de una población real.

Por su parte las funciones ${}_nq_x$ y e^0_x tienen en la población estacionaria la misma interpretación que en la tabla de vida.

6.5 Construcción de una Tabla de Mortalidad

El punto de partida de la construcción de una tabla de mortalidad para una población real, son las tasas de mortalidad por edades observadas $m(x,n)$, las cuales tienen sus valores equivalentes en la tasa central de mortalidad de la tabla ${}_nm_x$. La población de la tabla o población estacionaria ${}_nL_n$ tiene su correspondiente en la población censada o población con edad cumplida $N(x,x+n)$.

Para construir una tabla de mortalidad en una población real se asume que las tasas de mortalidad por edades de la población real son iguales a las tasas centrales de mortalidad de la tabla de mortalidad, luego:

$$m(x,x+n) = {}_nm_x$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{D(x,x+n)}{N(x.x+n)} = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x}$$

6.5.1 Relación entre la tasa central de mortalidad y la probabilidad de morir

Para construir e interpretar una tabla de mortalidad se debe establecer la relación entre los valores de la tabla y los respectivos valores observados de la mortalidad en la población. Esta relación es de gran importancia, ya que es la etapa fundamental en la construcción de una tabla de vida, según se verá posteriormente, es la conversión de las tasas centrales de mortalidad, en probabilidades de muerte para cada grupo de edades.

Partimos de las siguientes definiciones:

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} l_x dx}$$

Es evidente que si se conoce la función de supervivientes, la función que relaciona la probabilidad de morir y la tasa central de mortalidad podría determinarse en forma explícita, sin embargo, este es el principal problema, puesto que la función de supervivientes es matemáticamente compleja y variable de una población a otra, lo que lleva a plantear dos supuestos, para facilitar la relación:

a) Suponiendo que la función "supervivientes" varía en forma lineal en el intervalo de edades $[x, x+n[$, esto es: $l_x = a + bx$

Entonces $${}_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n}(a+bx)dx} =$$

$$= \frac{l_x - l_{x+n}}{\frac{n}{2}(l_x + l_{x+n})} = \frac{2\,{}_nq_x}{n(2-{}_nq_x)}$$

Despejando ${}_nq_x$

$${}_nq_x = \frac{2n\,{}_nm_x}{2+n\,{}_nm_x}$$

b) Si suponemos que la función superviviente varía en forma exponencial en el intervalo de edades $[x, x+n[$, es decir: $l_x = e^{a+bx}$

Entonces:

$${}_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_x^{x+n} e^{a+bx}dx} =$$

$$= \frac{e^{a+bx} - e^{a+b(x+n)}}{\frac{1}{b}(e^{a+b(x+n)} - e^{a+bx})} = -b$$

Por otro lado:

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{e^{a+bx} - e^{a+b(x+n)}}{e^{a+bx}} = 1 - e^{bn}$$

Finalmente, reemplazando el valor de "b" en la relación que define la probabilidad de morir en el intervalo $[x, x+n[$ se tiene: ${}_nq_x = 1 - e^{-n\,{}_nm_x}$